# PART3　3 次方程式の実数解の個数（定数分離）

**例題**

3 次方程式 $x^3-3x-a=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

(2)　1 つの負の解と 2 つの正の解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

**Point Pickup**

**練習**

3 次方程式 $-x^3+3x^2+9x-a=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

(2)　1 つの負の解と 2 つの正の解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

# 第16講　PART3 確認問題

3 次方程式 $2x^3-6x-3-a=0$ について，次の問いに答えよ。

**1**　異なる3つの実数解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

[アイ] $<a<$ [ウ]

**2**　2 つの負の解と 1 つの正の解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

[エオ] $<a<$ [カ]

# PART3　3次方程式の実数解の個数（定数分離）

**例題**

3次方程式 $x^3-3x-a=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　異なる3つの実数解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

(2)　1つの負の解と2つの正の解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

方程式を変形すると　$x^3-3x=a$

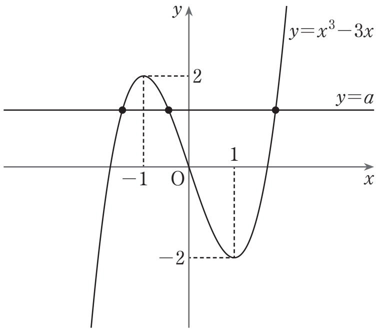
よって，この方程式の異なる実数解およびその個数は，3次関数 $y=x^3-3x$ …… ① のグラフと直線 $y=a$ の共有点の $x$ 座標およびその個数と一致する。①を微分すると

$$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

よって，$y$ の増減表は以下。

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-2$ | ↗ |

①のグラフは右図。




(1)　①のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が3個になる $a$ の値の範囲を求めて

$$-2<a<2$$

(2)　①のグラフと直線 $y=a$ が $x<0$ で共有点を1個，$x>0$ で共有点を2個もつような $a$ の値の範囲を求めて

$$-2<a<0$$

**練習**

3 次方程式 $-x^3+3x^2+9x-a=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

(2)　1 つの負の解と 2 つの正の解をもつとき，定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

方程式を変形すると $-x^3+3x^2+9x=a$

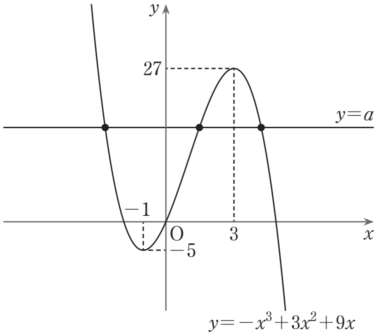
よって，この方程式の異なる実数解およびその個数は，3 次関数 $y=-x^3+3x^2+9x$ …… ①のグラフと直線 $y=a$ の共有点の $x$ 座標およびその個数と一致する。①を微分すると

$$y'=-3x^2+6x+9=-3(x-3)(x+1)$$

よって，$y$ の増減表は以下。

| $x$ | … | $-1$ | … | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $y$ | ↘ | $-5$ | ↗ | 27 | ↘ |

①のグラフは右図。




(1)　①のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が 3 個になる $a$ の値の範囲を求めて

$$-5<a<27$$

(2)　①のグラフと直線 $y=a$ が $x<0$ で共有点を 1 個，$x>0$ で共有点を 2 個もつような $a$ の値の範囲を求めて

$$0<a<27$$

# 第16講　PART3 確認問題 解答

**1**　**[正解]** アイ：$-7$，ウ：$1$

**[解説]**

方程式を変形すると

$$2x^3-6x-3=a$$

よって，この方程式の異なる実数解およびその個数は，3次関数 $y=2x^3-6x-3$ ……①のグラフと，直線 $y=a$ の共有点の $x$ 座標およびその個数と一致する。[A]

[A]　3次方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数
$\Longleftrightarrow$ 3次関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数

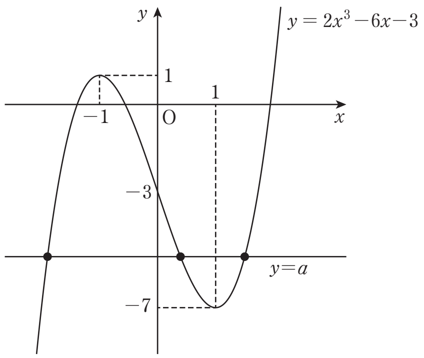
①を微分すると

$$y'=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$$

よって，$y$ の増減表は以下のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-7$ | ↗ |

また，①のグラフは下図のようになる。




①のグラフと直線 $y=a$ の共有点が3個になるとき，方程式の実数解の個数は3個となるので，求める $a$ の値の範囲は

$$\boldsymbol{-7<a<1}$$

**2** **[正解]** エオ：$-3$，カ：$1$

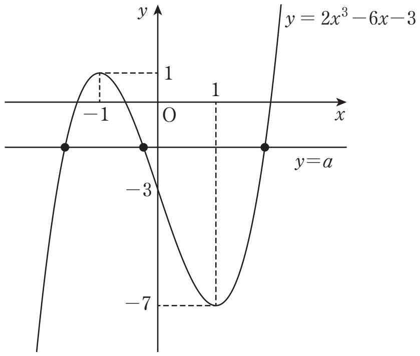
**[解説]**

方程式を変形すると

$$2x^3-6x-3=a$$

3 次関数 $y=2x^3-6x-3$ ……①とすると，$y$ の増減表と①のグラフは次のようになる。 [B]

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-7$ | ↗ |




①のグラフと直線 $y=a$ が $x<0$ で共有点を 2 個，$x>0$ で共有点を 1 個もつとき，方程式は 2 つの負の解と 1 つの正の解をもつので，求める $a$ の値の範囲は

$$\boldsymbol{-3<a<1}$$

[B] 3 次方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数
$\Longleftrightarrow$ 3 次関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数